

**THẦY VŨ HỒNG TÚ**

# **HÌNH HỌC 10**

## **CHƯƠNG 2**

### **TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ VÀ ỨNG DỤNG**

- ☒ **TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ.**
- ☒ **BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ.**
- ☒ **HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.**

**LƯU HÀNH NỘI BỘ LỚP TOÁN THẦY TÚ  
HỌ VÀ TÊN HỌC SINH:**

**NĂM 2020 - 2021**

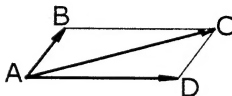
# BÀI 1 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

## I CÁC QUY TẮC VECTƠ

### ① Tổng hai vectơ:

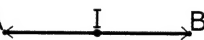
1.1 Quy tắc ba điểm của phép cộng:  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

1.2 Quy tắc hình bình hành:  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$



② Vectơ đối: 2.1 Quy tắc vectơ đối:  $\vec{AB} = -\vec{BA}$

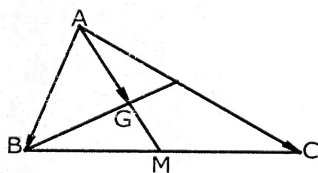
2.2 Nếu I là trung điểm AB  $\Leftrightarrow \vec{IA} = -\vec{IB}$ .



③ Hiệu của hai vectơ:  $\vec{AB} = \vec{MB} - \vec{MA}$

④ Tích vector với một số: Cho vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và một số thực  $k \neq 0$ . Tích của số  $k$  với vector  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $k \cdot \vec{a}$  chỉ một vector cùng phương với  $\vec{a}$  và cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$  (ngược hướng  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$ ). Khi đó độ dài của  $|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

### ⑤ Quy tắc trung điểm và quy tắc trọng tâm:



• Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm là G và M là trung điểm BC. Khi đó ta có:

5.1  $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

5.2  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$

5.3  $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$

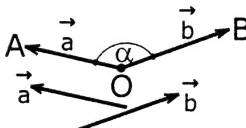
$$5.4 \quad \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$5.5 \quad \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}, \text{ với mọi điểm } M.$$

## II TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

① **Góc giữa hai vector:** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì, vẽ  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Góc  $\alpha = \widehat{AOB}$ , trong đó:  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  hay

$0 \leq \alpha \leq \pi$  là góc của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Kí hiệu:  $(\vec{a}; \vec{b})$ .



### Chú ý:

Ⓐ Nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hay  $\vec{b} = \vec{0}$  thì ta xem góc giữa hai vector là tùy ý từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ .

Ⓑ Nếu  $\alpha = 0$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

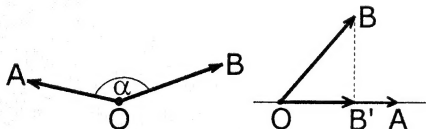
Ⓒ Nếu  $\alpha = 180^\circ$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

② **Định nghĩa tích vô hướng:** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vector  $\vec{0}$ .

Tích vô hướng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, ký hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được

định nghĩa bởi:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

2.1 Như vậy tích vô hướng:  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos(\widehat{AOB})$



### Chú ý:

Ⓐ Nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hay  $\vec{b} = \vec{0}$  thì quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Ⓑ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

© Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

đ Khi tích vô hướng luôn đưa hai vector về cùng điểm gốc.

© Tính góc A của  $\triangle ABC$  thỏa  $\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}$

$$2.2 \quad \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2 = AB^2.$$

$$2.3 \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

2.4  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$  với  $\vec{OB}'$  là hình chiếu của  $\vec{OB}$  lên giá của của vector  $\vec{OA}$  (đường thẳng chứa vector  $\vec{OA}$ ).

③ Các tính chất của tích vô hướng: Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số thực k ta có:

$$3.1 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$3.2 \quad \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

$$3.3 \quad (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b}).$$

$$3.4 \quad \vec{a}^2 \geq 0 \text{ và } \vec{a}^2 = 0 \text{ khi } \vec{a} = \vec{0}.$$

$$3.5 \quad (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

$$3.6 \quad (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

$$3.7 \quad \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}).$$

### III BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG.

$$2.1 \quad \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$$

$$2.2 \quad k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$$

$$2.3 \quad \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$2.4 \quad \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \text{ thỏa: } \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$$

$$2.5 \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$2.6 \quad \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2.7  $M$  là trung điểm  $AB$  &  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ :

$$M \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \text{ và } G \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

$$2.8 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \text{ Suy ra: } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0.$$

$$2.9 \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \downarrow \text{ làm g}$$

$$\Rightarrow \text{Góc } A \text{ của } \triangle ABC \text{ thỏa } \cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}$$

**CÂU 1.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ , tâm  $O$  và  $AH$  là đường cao. Tính tích vô hướng:

- Ⓐ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .   Ⓑ  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ .   Ⓒ  $\vec{AB}(\vec{AB} - 2\vec{AC})$ .  
 Ⓓ  $\vec{BC}(\vec{AB} + \vec{AC})$ .   Ⓔ  $\vec{OA}(\vec{OB} + \vec{OC})$ .   Ⓕ  $\vec{AH} \cdot \vec{BA}$ .

**CÂU 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB=5$ ,  $BC=7$ ,  $CA=8$ .

- Ⓐ Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  và tính góc  $\widehat{BAC}$ .  
 Ⓑ Tính tích vô hướng  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ .

© Gọi D là điểm trên cạnh AC sao cho  $3CD=AC$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

đ Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho  $3IB=5IC$ . Tính:  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

e Tính độ dài đường phân giác trong AE và phân giác ngoài AF.

**CÂU 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB=2$ ,  $AC=3$  và  $\widehat{BAC}=120^\circ$ .

a Tính độ dài cạnh BC.

b Tính độ dài trung tuyến AM.

© Gọi I, J là các điểm định bởi:  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ,  $\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$ . Tính độ dài IJ.

đ Tính độ dài BK, với điểm K thỏa:  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ .

e Tính độ dài đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE.

**CÂU 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB=6$ ,  $AC=8$ ,  $BC=11$ .

a Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  &  $\cos A$ .

b Trên cạnh AB, lấy điểm M sao cho  $AM=2$ . Trên cạnh AC, lấy điểm N sao cho  $AN=4$ . Tính tvh  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ .

© Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

**CÂU 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB=2$ ,  $AC=3$ ,  $BC=4$ .

a Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  &  $\cos A$ .

b Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

© Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$ .

đ Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Tính độ dài AD.

**CÂU 6.** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là điểm tùy ý. Chứng minh:

a  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

b  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ . Suy ra vị trí của điểm M để  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  nhỏ nhất.

**CÂU 7.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh a. Trên đoạn AC lấy điểm M sao cho  $MA=2MC$ , trên đoạn BC lấy điểm N sao cho  $NB=4NC$ .

Ⓐ Tính  $\vec{BM}$  &  $\vec{AN}$  theo  $\vec{AB}$  &  $\vec{AC}$ .

Ⓑ Chứng minh  $BM \perp AN$ .

**CÂU 8.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh 3a. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho  $BM=a, CN=2a, AP=x, (0 < x < 3a)$ .

Ⓐ Tính  $\vec{AM}$  theo  $\vec{AB}$  &  $\vec{AC}$ .

Ⓑ Chứng minh:  $\vec{PN} = \frac{1}{3}(\vec{AC} - \frac{x}{a} \cdot \vec{AB})$ .

Ⓒ Tìm x để:  $AM \perp PN$ .

**CÂU 9.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, biết:  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -4, \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 9$ .

Ⓐ Tính các cạnh của  $\triangle ABC$ .

Ⓑ Gọi I, J là hai điểm thỏa:  $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}, 2\vec{JB} - \vec{JC} = \vec{0}$ . Tính độ dài đoạn IJ.

**CÂU 10.** Cho  $\triangle ABC$  vuông có cạnh huyền  $BC = a\sqrt{3}$ . Gọi AM là trung tuyến của tam giác, biết:  $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$ . Tính AB và AC.

**CÂU 11.** Cho hình thang vuông ABCD có đường cao  $AB = a\sqrt{3}$ , cạnh đáy  $AD = a, BC = 2a$ .

Ⓐ Tính tích vô hướng  $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$  và cos của góc nhọn tạo bởi AC, BD.

Ⓑ Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, tính:  $\vec{AG} \cdot \vec{AB}$ .

**CÂU 12.** Cho hình thang ABCD, đường cao  $AB = 2a$ , đáy lớn  $BC = 3a$  và đáy nhỏ  $AD = 2a$ .

Ⓐ Tính các tích vô hướng:  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}, \vec{BD} \cdot \vec{BC}, \vec{AC} \cdot \vec{BD}$ .

Ⓑ Gọi M là trung điểm CD. Chứng minh:  $AM \perp BD$ .

**CÂU 13.** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB, đáy nhỏ  $AD = a$ , đáy lớn  $BC = 2a$ , I là trung điểm của AB. Tính  $\vec{AI} \cdot \vec{ID}$  trong trường hợp sau:

Ⓐ  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = a^2$ .

Ⓑ  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = a^2$ .

Ⓒ  $\vec{IC} \cdot \vec{ID} = a^2$  với I là điểm giữa của AB.

**CÂU 14.** Cho hình thang vuông ABCD, có đường cao  $AB=3a$ ,  $AD=2a$  và  $BC=\frac{9a}{2}$ .

Ⓐ Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . Ⓑ  $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ . Ⓒ  $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ , suy ra góc  $(\vec{AC}, \vec{BD})$ .

Ⓓ Gọi M là trung điểm của AC. Tính  $\vec{BM} \cdot \vec{BD}$ , suy ra  $\cos \widehat{MBD}$ .

**CÂU 15.** Cho  $\triangle ABC$  có đường cao AH, trung tuyến AM. Chứng minh:

Ⓐ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}$ .

Ⓑ  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

Ⓒ  $AB^2 - AC^2 = 2\vec{BC} \cdot \vec{MH}$ .

**CÂU 16.** Cho hình chữ nhật ABCD tâm O. Gọi M là điểm tùy ý. Chứng minh:

Ⓐ  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$

Ⓑ  $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$

Ⓒ  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

Ⓓ  $MA^2 + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = 2\vec{MA} \cdot \vec{MO}$ .

**CÂU 17.** Gọi H là trực tâm của  $\triangle ABC$  và M là trung điểm BC. Chứng minh:

Ⓐ  $\vec{MH} \cdot \vec{MA} = \frac{BC^2}{4}$

Ⓑ  $MA^2 + MH^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$ .

**CÂU 18.** Cho tứ giác ABCD.

Ⓐ Tìm tập hợp điểm M thỏa  $(\vec{MA} + \vec{MC})(\vec{MB} + \vec{MD}) = 0$ .

Ⓑ Tìm tập hợp điểm N thỏa  $\vec{NA}(\vec{NB} + \vec{NC}) = 0$ .

**CÂU 19.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Tìm tập hợp các điểm M thỏa:

Ⓐ  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MC}$ . Ⓑ  $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . Ⓒ  $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = MA^2$ .



**CÂU 20.** Cho  $\triangle ABC$  có trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Tính

$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA}$  theo  $BC=a$ .

**CÂU 21.** Cho hình bình hành ABCD với  $AB=\sqrt{3}$ ,  $AD=1$  và  $\widehat{BAD}=30^\circ$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- b) Tính độ dài hai đường chéo AC và BD.
- c) Tính  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ .

**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG**

**CÂU 22.** Cho  $A(10;5), B(3;2), C(6;-5)$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại B.

**CÂU 23.** Cho  $A(1;-2)$ ,  $B(-3;3)$ , tìm điểm  $C(x;x+2)$  sao cho  $\triangle ABC$  vuông tại C.

**CÂU 24.** Cho  $A(1;1)$ ,  $B(6;8)$ . Tìm tọa độ điểm M sao cho  $\triangle MAB$  vuông cân tại M. *(làm 24 ko Hưm)*  $\in O_y$

**CÂU 25.** Cho  $A(1;1)$ ,  $B(2;4)$ ,  $C(10;-2)$ .

- a) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại A.
- b) Tìm trực tâm H của  $\triangle ABC$ .
- c) Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$  và  $\cos B$ .

d) Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  và  $\cos C$ .

**CÂU 26.** Cho  $A(5;3)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(-1;5)$ .

- a) Tìm tọa độ trực tâm H của  $\triangle ABC$ .
- b) Tìm chân đường cao  $AA'$  của  $\triangle ABC$ .

**CÂU 27.** Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ :

- a)  $\vec{a}=(2;-3)$  &  $\vec{b}=(6;4)$ .
- b)  $\vec{a}=(3;2)$  &  $\vec{b}=(5;-1)$ .
- c)  $\vec{a}=(-2;-2\sqrt{3})$  &  $\vec{b}=(3;\sqrt{3})$ .

**CÂU 28.** Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm  $A(1; -2)$  và  $B(-3; 1)$ .

- a) Tìm C trên Ox sao cho C cách đều hai điểm A và B?
- b) Tính góc AOB?

**CÂU 29.** Cho hai vectơ:  $(\vec{a} + 2\vec{b})$  &  $(5\vec{a} - 4\vec{b})$  vuông góc với nhau, biết:

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ , tính góc của hai vectơ:  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

**CÂU 30.** Cho  $A(-8;0)$ ,  $B(0;4)$ ,  $C(2;0)$  &  $D(-3;-5)$ . Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp được.

**CÂU 31.** Cho  $A(-2;1)$ , gọi B là điểm đối xứng của A qua O. Tìm điểm C sao cho  $\triangle ABC$  vuông ở C và C có tung độ bằng 2.

**CÂU 32.** Cho  $A(1;-1)$ ,  $B(3;0)$  là hai đỉnh của hình vuông ABCD. Tìm tọa độ đỉnh C, D.

**CÂU 33.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A,  $M(1;-1)$  là trung điểm BC &  $G(\frac{2}{3};0)$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tìm các đỉnh A, B, C.

**CÂU 34.** Cho  $\triangle ABC$ , có trọng tâm  $G(0;4)$ , biết  $M(2;0)$  là trung điểm BC. Tìm tọa độ A, B và tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**CÂU 35.** Cho  $A(1;1)$ , tìm B trên đường thẳng  $y=2$  và điểm C trên trục Ox để  $\triangle ABC$  đều.

**CÂU 36.** Cho  $\triangle ABC$  có:  $A(5,3)$ ;  $B(2,-1)$ ;  $C(-1,5)$ .

(a) Tìm điểm M trên trục tung sao cho A, B, M thẳng hàng.

(b) Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ A. *đ/ Tìm E ∈ Oy sao cho*

(c) Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . *(AE + BE) ngắn*

**CÂU 37.** Cho  $\triangle ABC$  với  $A \in Oy$  và  $B \in Ox$ , trung tuyến AM với  $M(3,2)$ , *như 1* đường cao AH với  $H(1,1)$ . Tìm tọa độ A, B, C. *đ/ Tìm F ∈ Oy sao cho*

**CÂU 38.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(3;-1)$ ,  $B(-3;2)$ ,  $C(3;5)$ .

(a) Tính chu vi và diện tích  $\triangle ABC$ . *đ/ Tìm P ∈ AB sao cho (AF² + 2BF²) nhỏ nhất*

(b) Tìm trọng tâm G, trực tâm H, tâm I đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Chứng minh G, H, I thẳng hàng. *đ/ Tìm M ∈ Ox để |AM - 3BM + 4CM| nhỏ nhất*

**CÂU 39.** Cho  $\triangle ABC$  biết  $A(1;2)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(5;-1)$ .

(a) Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

(b) Tính  $\cos A$  và  $\sin A$ .

(c) Tìm tọa độ chân đường cao A' của  $\triangle ABC$ .

(d) Tìm trực tâm H của  $\triangle ABC$ .

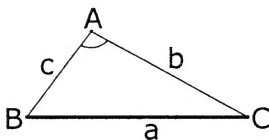
(e) Tìm trọng tâm G, tâm I đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh G, H, I thẳng hàng.

## BÀI 2 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

### I ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN.

**(1) ĐỊNH LÝ:** Cho tam giác ABC, với  $a=BC$ ,  $b=AC$  và  $c=AB$ .

$$\bullet \boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A}$$



Chú ý: Công thức thu gọn:

Ⓐ  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Ⓑ  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

Ⓒ  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

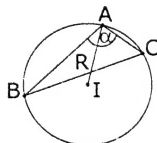
### (2) HỆ QUẢ:

Ⓐ  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Ⓑ  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

Ⓒ  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

### II ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN.



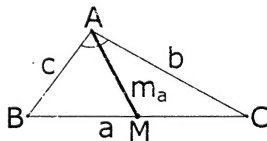
• Với mọi tam giác ABC, ta có:

$$\boxed{\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R (= 2IA = 2IB = 2IC)}$$

hay:  $\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R},$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

### III ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN



**(1) ĐỊNH LÝ:** Cho tam giác ABC, với  $a=BC$ ,  $b=AC$ ,  $c=AB$  và M là trung

điểm BC. Ta có:  $\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}}$

**(2) HỆ QUẢ:** Cho tam giác ABC, với  $a=BC$ ,  $b=AC$ ,  $c=AB$

và  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  là các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B và C của  $\triangle ABC$ , ta có:

$$\textcircled{a} m_a = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad \textcircled{b} m_b = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \quad \textcircled{c} m_c = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

#### IV CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

• Cho tam giác ABC, với  $a=BC$ ,  $b=AC$ ,  $c=AB$ ;  
 $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  là các đường cao tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C;  $p$   
 là nửa chu vi;  $r$  và  $R$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp  
 tam giác ABC.

$$\textcircled{1} S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$\textcircled{2} S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C$$

$$\textcircled{3} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\textcircled{4} S = \frac{abc}{4R}$$

$$\textcircled{5} S = p.r$$

**CÂU 1.** Cho tam giác ABC có góc  $\widehat{BAC}=120^\circ$ , cạnh  $AB=1$  và cạnh  $AC=2$ .

Ⓐ Tính cạnh BC.

Ⓑ Trên CA kéo dài lấy điểm D sao cho  $BD=2$ . Tính độ dài AD.

**CÂU 2.** Ⓐ Cho tam giác ABC có cạnh  $a=7$ ,  $b=24$ ,  $c=23$ . Tính góc A của tam giác ABC.

Ⓑ Cho tam giác ABC có  $a=12$ ,  $b=13$ ,  $c=15$ . Tính  $\cos A$  và góc A.

**CÂU 3.** Tính góc lớn nhất của tam giác ABC, biết:

Ⓐ Các cạnh  $a=3$ ,  $b=4$ ,  $c=6$ .

Ⓑ Các cạnh  $a=40$ ,  $b=3$ ,  $c=37$ .

**CÂU 4.** Cho tam giác ABC có các cạnh thỏa  $a(a^2-b^2)=c(b^2-c^2)$ . Hãy tính góc B của tam giác ABC.

**CÂU 5.** Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại

M, N, P. Biết rằng  $MB=3$ ,  $MC=2$ ,  $AN=AP=x$  &  $\widehat{ABC}=60^\circ$

Ⓐ Tính  $x$  và bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

Ⓑ Tính NP.

**CÂU 6.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{ABC}=45^\circ$ ,  $\widehat{ACB}=75^\circ$  và đường phân giác trong  $AD=4$ . Tính cạnh AC, BC, AB và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**CÂU 7.** Cho tam giác ABC không vuông, có trực tâm H. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC, HCA và HAB bằng nhau.

**CÂU 8.** Cho tam giác ABC có  $AB=6$ ,  $AC=8$  và góc  $\widehat{BAC}=60^0$ .

- (a) Tính diện tích  $\triangle ABC$ .
- (b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Tính diện tích  $\triangle IBC$ .
- (c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**CÂU 9.** Cho tam giác ABC có  $m_b=4$ ,  $m_c=2$  và  $a=3$ . Tính độ dài các cạnh AB và AC.

**CÂU 10.** Cho tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là 15, 18, 27.

- (a) Tính diện tích tam giác.
- (b) Tính độ dài các cạnh của tam giác.

**CÂU 11.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a=7$ ,  $b=8$ ,  $c=6$ .

- (a) Tính  $\cos A$ , diện tích S, độ dài đường cao  $h_a$  và độ dài trung tuyến  $m_a$ .
- (b) Lấy điểm D đối xứng với A qua C. Tính độ dài BD.

**CÂU 12.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB=10$ ,  $AC=4$  và  $\widehat{BAC}=60^0$ .

- (a) Tính chu vi của tam giác.
- (b) Tính  $\tan \widehat{ACB}$ .
- (c) Trên tia đối của AB, lấy điểm D sao cho  $AD=6$  và trên tia AC lấy điểm E sao cho  $AE=x$ . Tìm x để BE là tiếp tuyến của đường tròn (ADE).

**CÂU 13.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB=3$ ;  $AC=5$ ;  $BC=7$ . Tính:

- (a) Góc A và diện tích  $\triangle ABC$ .
- (b) Các đường trung tuyến AM; BN; CP.
- (c) Các đường cao  $AA'$ ;  $BB'$ ;  $CC'$ .
- (d) Bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp.
- (e) Phân giác trong AD và phân giác ngoài AE.